古典型Hecke環の表現型の決定 (組合せ論的表現論の諸相)

有木, 進

数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 74-79

古典型 Hecke 環の表現型の決定

京都大学・数理解析研究所　有木　進 (Susumu Ariki)

Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1　直既約加群の分類問題と表現型

表現論において，既約加群の完全代表系を決定することはまず最初に考えるべき基本的な問題である．Lie 代数や関連する代数の種々の最高ウエイト理論，有限群の群環であれば，Lusztig による Lie 型有限群の既約通常指標の分類と Dipper–James や Geck–Hiss–Malle によるモジュラーな場合への一般化，また局所体上の代数群や実 Lie 群の場合など実例には事欠かない．

加群圏が半単純であれば，これで加群圏が完全にわかったわけだが，一般には半単純ではないので，既約加群の分類のつぎに直既約加群の分類をしようと試みるのは自然であり，実際，東欧圏やドイツを中心とした研究者による多くの一般的な結果が蓄積されてきた．しかしながら，これらの研究者の考える具体例は，一部の例を除けば，部外者にはわかりにくい環であり，Hecke 環のような基本的な環でさえ，あまり研究されてこなかった．群環ならばよくわかる例といえるが，この場合は Hopf 代数であることに依存した研究手法がとられており，やはり Hecke 環をカバーしていないのである．

ここでは古典型 Hecke 環の表現型を決定できたことを報告したい．具体的には，[A2] の内容を一部省略して紹介するのが目的である．

まず，以下で，上で述べた直既約加群の分類に関する一般的な結果について復習する．必要なのは有限次元代数に関する結果だけであるから，あまり一般化せずに結果を引用する．

F を代数閉体，$F[X]$ を 1 変数多項式環，F_λ は $X \mapsto \lambda \in F$ で定まる 1 次元既約 $F[X]$- 加群とする．また，$F\langle X, Y\rangle$ を 2 変数非可換多項式環とする．

定義 1.1 F を代数閉体，A を F 上の有限生成代数とする．

(a) A が有限型とは，直既約 A- 加群の同型類の個数が有限のときをいう．

(b) A が有限型でなく，しかも各自然数 $d \in \mathbb{N}$ に対して，$F[X]$- 加群として有限生成自由加群である $(A, F[X])$- 両側加群 $M_1, \ldots, M_{n_d}$ が存在して，d 次元直既約加群が，有限個の例外を除けば，必ず $M_i \otimes_{F[X]} F_\lambda$ の形の加群と同型になるとき，A を tame 型という．

(c) $F\langle X, Y\rangle$- 加群として有限生成自由加群である $(A, F\langle X, Y\rangle)$- 両側加群 M が存在して，関手

$$\mathcal{F}_M = M \otimes_{F\langle X,Y\rangle} - \;:\; F\langle X, Y\rangle\text{-}mod \longrightarrow A\text{-}mod$$

が直既約加群を直既約加群に対応させ，非同型な直既約加群を非同型な直既約加群に対応させるとき，A を wild 型という．

Drozd の定理 [Dr] により，任意の有限生成代数は有限型， tame 型， wild 型のどれかただひとつの型をもつ．これを A の表現型と呼ぶ． wild ならば，任意の有限生成 F-代数の直既約加群の同型類の集合を A の直既約加群の同型類の集合の部分集合として実現できる．たとえば， F を $\mathbb{F}_3$ の代数閉包とすると，対称群の群環 FS_6 は wild であるから，任意の Kac–Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し， F 上定義された包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の直既約加群の同型類の集合は， FS_6 の直既約加群の同型類の集合の部分集合として実現できるわけである．このことからわかるように， wild ならば，直既約加群の分類は期待できない．よって，直既約加群の分類問題を考えるとき，表現型を決定することは重要な問題である．

具体的にどうすれば表現型が決定できるかであるが， Gabriel の定理により，すべての有限次元代数 A は，道代数 FQ の商環で $I = \mathrm{Ker}(FQ \to A)$ が admissible ideal，すなわち J を長さ 1 の辺が生成する FQ の両側 ideal とするとき

$$J^N \subset I \subset J^2 \qquad (N >> 0)$$

であるもの，と森田同値であることが知られている．そこで，有限次元代数の表現論では， A としてつねにこの形を仮定し，その上でいろいろなかたちの定理を証明する．

まず wild 型のほうを考えよう．定義より明らかに， A の商環が wild ならば A も wild である．また，ベキ等元 e があり eAe が wild なら A も wild である．

次の定理が知られている．文献としては， [DF]， [N]， [S] を挙げておく．

定理 1.2 F を代数閉体， Q を cycle を持たない有向グラフとする． Q の向きを忘れることにより得られる無向グラフを $\underline{Q}$ とするとき， Q の道代数 FQ が

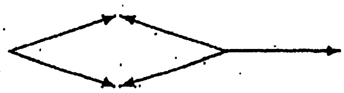
(1) 有限型 $\Longleftrightarrow$ $\underline{Q}$ が有限型 Dynkin 図形 A， D， E のどれか．

(2) tame 型 $\Longleftrightarrow$ $\underline{Q}$ が Euclid 型 Dynkin 図形 $\tilde{A}$， $\tilde{D}$， $\tilde{E}$ のどれか．

(3) wild 型 $\Longleftrightarrow$ $\underline{Q}$ がそれ以外の場合．

この定理を使うことにより， wild 型と判定できる場合がある．たとえば古典型 Hecke 環の場合は次の単純な補題がけっこう有用である．

補題 1.3 有向グラフ Q が次の有向グラフを部分グラフとして含むとする．



また，有限次元 F-代数 A は FQ の admissible ideal による商環とする．このとき， A は wild 型である．

他に，多くのこの類の結果があり，そのうちのいくつかを古典型 Hecke 環の表現型の決定でも用いた．

一般には，商環に wild 型道代数が現れないことも多い．すなわち，商環を考えるとどうしても関係式が出てきてしまうのが普通である．その場合に強力なのが，被覆理論と Krause の定理 [Kr1] である．まず，被覆理論を説明する．

定義 1.4 有向グラフ $\tilde{Q}$ が有向グラフ Q の被覆とは，$\tilde{Q}$ の頂点集合と有向辺集合から Q の頂点集合と有向辺集合へ各々全射写像があって次をみたすときをいう．

$\tilde{Q}$ の各頂点 $\tilde{x}$ に対し，その像として得られる Q の頂点を x とする．このとき，頂点集合の全射と有向辺集合の全射は

(1) $\tilde{x}$ を始点とする辺の終点のなす集合と x を始点とする辺の終点のなす集合の全単射を誘導する．

(2) $\tilde{x}$ を終点とする辺の始点のなす集合と x を終点とする辺の始点のなす集合の全単射を誘導する．

被覆が Galois 被覆とは，グラフの自己同型群 $\mathrm{Aut}(\tilde{Q})$ の部分群 G が存在して，Q の各頂点 x に対し，そのファイバーが G と同型な G-軌道をなすときをいう．

定義 1.5 $\tilde{Q}$ を Q の Galois 被覆とし，$F\tilde{Q} \longrightarrow FQ$ を対応する道代数の F-代数準同型とする．$F\tilde{Q}$ の admissible ideal $\tilde{I}$ が FQ の admissible ideal I の上へ写るとき，$\tilde{A} = F\tilde{Q}/\tilde{I}$ を $A = FQ/I$ の Galois 被覆という．

Galois 被覆 $\tilde{A} = F\tilde{Q}/\tilde{I}$ は無限次元 F-代数であるが，Galois 被覆が wild かどうかはもとの環 $A = FQ/I$ より判定しやすく，その後，pushdown 関手を考えることにより，多くの場合 A 自身が wild であることを判定できる．(pushdown 関手を具体的に記述することにより wild であることを判定することもできるが，現在は de la Peña や Han による定理があり，より簡単に判定できる．[dlP]，[D]，[Ha] を参照のこと．）表現型を決定したいと思ったときに被覆理論はきわめて標準的な手法であり，古典型 Hecke 環の表現型の決定にあたっても使った．

次に Krause の定理を説明しよう．A-$\underline{mod}$ を stable module category とする．すなわち，object は A-加群の全体で，A-加群 M, N に対し，$\mathrm{Hom}_A(M,N)$ を射影 A-加群を経由する A-加群準同型の全体 $\mathrm{PHom}_A(M,N)$ で割った

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\,\mathrm{PHom}_A(M,N)$$

を M から N への morphism とする加法圏である．

定義 1.6 A-$\underline{mod}$ と B-$\underline{mod}$ が圏同値とする．このとき，A と B は stable equivalent である，という．

定理 1.7 (Krause) 有限次元 F-代数 A と B が stable equivalent ならば，A と B の表現型は一致する．

とくに，$D^b(A\text{-}mod)$ と $D^b(B\text{-}mod)$ が三角圏として同値，すなわち A と B が derived equivalent ならば，Rickard の定理 [Ri] により stable category の三角圏としての同値が誘導されるので，A と B の表現型は一致する．

以上，wild 型となるための判定法ばかり述べてきたが，tame 型になるための判定法もあり，さいわいに古典型 Hecke 環の場合にはこれで十分である．

定義 1.8 有限次元 F-代数 $A = FQ/I$ が次の条件をみたすとする．

(a1) Q の各頂点 x に対し，この頂点を始点とする有向辺は高々 2 本

(a2) Q の各頂点 x に対し，この頂点を終点とする有向辺は高々 2 本.

(b1) Q の各有向辺 α に対し，$\alpha\beta \notin I$ となる有向辺 β は存在しても高々 1 本.

(b2) Q の各有向辺 α に対し，$\beta\alpha \notin I$ となる有向辺 β は存在しても高々 1 本.

このとき，A を special biserial 代数と呼ぶ.

定理 1.9 (Wald–Waschbüsch) special biserial 代数は有限型か tame 型である.

2 主結果

前節で述べたように，道代数の商環ならば表現型を判定する方法が多く存在する．そこで，一般の F–代数の場合は次のような方法で表現型を決めることになる.

(a) A が wild 型であると結論したいときは，A の直既約射影加群の同型類の代表系から一部を取り $\{P_i\}_{i\in I}$ とする．そして，$\mathrm{End}_A(\oplus_{i\in I}P_i)$ の商環が wild 型であることを示す.

(b) A が tame 型であると結論したいときは，A の直既約射影加群の同型類の代表系をすべて取り，これを $\{P_i\}_{i\in I}$ とする．そして，$\mathrm{End}_A(\oplus_{i\in I}P_i)$ が tame 型であることを示す.

一般には，$\mathrm{End}_A(\oplus_{i\in I}P_i)$ を決定することは難しい．つまりこの部分がクリアできないため表現型が決定できないのが普通である．しかしながら，古典型 Hecke 環の場合は私が以前示した結果により，基礎体 F の標数が正であっても重要な部分で（Fock 空間の標準基底を計算することにより）分解係数が計算でき，これでかなりの情報が得られる．そして，種々の別の議論をあわせて用いることにより，最終的に古典型 Hecke 環の表現型を決定することができた．主結果は次の通りである.

W を既約とは限らない古典型 Weyl 群，$\mathcal{H}_W(q)$ を対応する Hecke 環とする.

定義 2.1 Weyl 群 W に対し，

$$P_W(x) = \sum_{w\in W} x^{\ell(w)}$$

を W の Poincaré 多項式と呼ぶ.

定理 2.2 次が成立する.

(1) $\mathcal{H}_W(q)$ が有限型であるための必要十分条件は，$(x-q)^2$ が $P_W(x)$ を割り切らないことである.

(2) tame 型になるための必要十分条件は，$q=-1\neq 1$ かつ q が $P_W(x)=0$ の重複度 2 の重根になることである.

(3) 上記以外の場合は wild 型になる.

3 今後の課題

課題の第1は，上記の結果を block 代数に対する結果に精密化することである．A 型 Hecke 環の場合は Erdmann–Nakano [EN] により完全な結果が得られている．

さて，wild 型だと直既約加群の分類自体は望めないが，Auslander–Reiten 完全系列を使って，stable Auslander–Reiten quiver という有向グラフが定義され，各連結成分ごとには，構造を決定し得る．この方向の研究は有限次元代数の表現論の中心に位置するのであるが，群環の block 代数に関して Erdmann は次の結果 [Er2] を得た．課題の第2は，この結果の q–類似を得ることである．

定理 3.1 (Erdmann) F を代数閉体，G を有限群，A を FG の block 代数で wild 型とする．このとき，A の stable Auslander–Reiten quiver の連結成分は，$\mathbb{Z}A_\infty$ をグラフ自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}A_\infty)$ のある部分群で割った形をしている．
（つまり tree class が A_∞ である．）

References

[A1] S. Ariki, Representations of Quantum Algebras and Combinatorics of Young Tableaux, University lecture series **26**, AMS, 2002.

[A2] ——, Hecke algebras of classical type and their representation type, math.QA/0302136.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø, Representation theory of Artin algebras, Cam. Stud. Adv. Math., **36**, CUP, 1997.

[B] D. J. Benson, Representations and cohomology I, Cam. Stud. Adv. Math., **30**, CUP, 1991.

[dlP] J. A. de la Peña, Tame algebras: some fundamental notations, a preliminary version of chapters of a book in preparation.

[DF] P. Donovan and M. R. Freislich, The representation theory of finite graphs and associated algebras, Carleton Mathematical Lecture Notes, **5**, Carleton University, 1973.

[D] P. Dräxler, Cleaving functors and controlled wild algebras, J. Pure Appl. Algebra, **169** (2002), 33–42.

[Dr] Yu. A. Drozd, Tame and wild matrix problems, Representation Theory II, Lecture Notes in Math., **832** (1980), 242–258.

[Er1] K. Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Notes in Math., **1428**, Springer–Verlag, 1990.

[Er2] ——, On Auslander–Reiten components for group algebras, J. Pure Appl. Algebra, **104** (1995), 149–160.

[EN] K. Erdmann and D. K. Nakano, Representation type of Hecke algebras of type A, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 275–285.

[Ha] Y. Han, Controlled wild algebras, Proc. London Math. Soc. (3), **83** (2001), 279–298.

[Kr1] H. Krause, Stable equivalence preserves representation type, Comment. Math. Helv., **72** (1997), 266–284.

[Kr2] ——, Representation type and stable equivalence of Morita type for finite dimensional algebras, Math. Z., **229** (1998), 601–606.

[Le] H. Lenzing, Invariance of tameness under stable equivalence: Krause's theorem, in "Infinite Length Modules", H. Krause and C. M. Ringel (eds.), Trends Math., (2000), 405–418.

[N] L. A. Nazarova, Representations of quivers of infinite type, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **37** (1973), 752–791.

[Ri] J. Rickard, Derived categories ans stable equivalence, J. Pure Appl. Algebra, **61** (1989), 303–317.

[R1] C. M. Ringel, Tame algebras, in "Representation Theory I", Lecture Notes in Math., **831** (1980), 137–287.

[R2] ——, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, Lecture Notes in Math., **1099**, Springer–Verlag, 1984.

[S] D. Simson, Linear representations of partially ordered sets and vector space categories, Algebra, Logic and Applications Series, 4, Gordon and Breach Science Publishers, 1992.

[U] K. Uno, On representations of non–semisimple specialized Hecke algebras, J. Algebra, **149** (1992), 287–312.

[W] J. Waschbüsch, Universal coverings of self–injective algebras, in "Representations of Algebras", Lecture Notes in Math., **903** (1981), 331–349.

[WW] B. Wald and J. Waschbüsch, Tame biserial algebras, J. Algebra, **95** (1985), 480–500.